به نام خدا

مثال: یک تاس را دوبار پرتاب می کنیم، احتمال این پیشامد که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر 7 باشد را حساب کنید.

فضای نمونه برای این مسئله $= \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

$$N = |\Omega| = 36$$

(مجموع دو عدد برابر 7)

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$N_A = |A| = 6$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{N_A}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

* احتمال هر پیشامد ساده در این مثال را محاسبه کنید.

پیشامد ساده: $A_1 = \{(1,1)\}$ $\longrightarrow$ $P_{A_1} = \frac{N_{A_1}}{N} = \frac{1}{36}$

$$P(A_i) = \frac{1}{36} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 36$$

در این آزمایش، پیشامدهای ساده هم احتمال هستند.

$$\sum_{i=1}^{36} P(A_i) = 1$$

همان طور که دیدیم، برای محاسبه‌ی احتمال پیش‌آمدها، لازم است که بتوانیم N_A و N را محاسبه کنیم. یکی از تکنیک‌های مورد استفاده برای این منظور، استفاده از آنالیز ترکیبی است. در ادامه مروری بر آنالیز ترکیبی خواهیم داشت.

یادآوری از آنالیز ترکیبی

یکی از مفاهیم مورد استفاده در بحث آنالیز ترکیبی، مفهوم جایگشت است.

* جایگشت

Permutation

تعداد نحوه های چینش N شی در m محل یا مکان به صورتی که ترتیب آنها اهمیت داشته باشد را جایگشت N شی در m مکان می گوییم.

مکان 1	2	3	...	m
N	$N-1$	$N-2$		$N-m+1 = N-(m-1)$

$$\text{تعداد حالت های کل} = N(N-1)(N-2)\cdots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!} \triangleq P_m^N$$

در مسئله قبل اگر تکرار مجاز باشد، تعداد حالت ها چه تغییری می کند؟

مکان

1	2	3	...	m
N	N	N		N

تعداد حالت های ممکن $= N^m$

مثال: با عددهای 3, 5, 7, 6, 9 چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

۱- اگر تکرار مجاز نباشد

5 4 3

$$P^5_3 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

۲- اگر تکرار مجاز باشد

$$5^3 = 125$$

5 5 5

* درمورد جایگشت، رابطه بازگشتی زیر همواره برقرار است:

$$P_m^N = (N-m+1)P_{m-1}^N$$

* نحوه چینش N شی در N محل به طوری که ترتیب آنها مهم باشد:

$$\xrightarrow{N=m} P_N^N = \frac{N!}{0!} = N!$$

* مفهوم ترکیب   Combination

تعداد کل انتخاب m شی از بین N شی به طوری که ترتیب آنها مهم نباشد را ترکیب m شی از N شی گوییم و برابر است با

$$C_m^N = \frac{P_m^N}{\underbrace{m!}_{\text{جابجایی‌های } m \text{ شی در } m \text{ محل}}} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!} = \binom{N}{m}$$

$$\boxed{C_m^N = C_{N-m}^N}$$

مثال: در یک مجموعه ده عضوی تعداد زیرمجموعه های 4 عضوی چقدر است؟

$$C_4^{10} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!}$$

مثال: می خواهیم 4 توپ قرمز و 6 توپ سفید را در ده جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه فقط یک توپ قرار بگیرد. تعداد حالت های ممکن، چقدر است؟

$$C_4^{10} = C_6^{10} = \frac{10!}{4!\,6!}$$

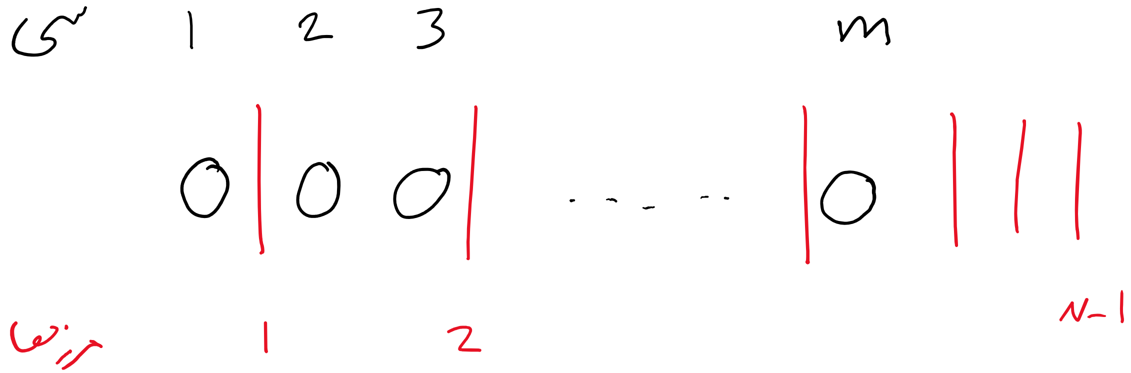
* به طور کلی اگر بخواهیم m شی مشابه را در N جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه فقط یک شی قرار داشته باشد (با شرط $m \leq N$) تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$C^N_m = \binom{N}{m} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}$$

* در مسأله بالا اگر ترتیب قرارگرفتن شی‌ها در جعبه‌ها، مهم باشد. تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$P^N_m = \frac{N!}{(N-m)!} = m!\, C^N_m = m! \binom{N}{m}$$

* اگر بخواهیم m شئ را در N جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه، به هر تعداد دلخواه از شئ ها قرار بگیرد، تعداد حالت های ممکن چقدر خواهد بود؟



می خواهیم m شئ را بین N جعبه تقسیم کنیم به طوری که تعداد شئ ها در هر جعبه دلخواه باشد

← به $N-1$ مرز بین این شئ ها نیاز داریم

این مرزها را می توان در $N+m-1$ مکان قرار داد. بنابراین تعداد حالت های ممکن، معادل انتخاب $N-1$ مکان از بین $N+m-1$ مکان است

$$C^{N+m-1}_{N-1} = \binom{N+m-1}{N-1}$$

* معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_N = m$ را در نظر می‌گیریم. اگر x_i ها اعداد صحیح
غیرمنفی باشند، تعداد جواب‌های این معادله چقدر است؟

مثبت یا صفر

فرض می‌کنیم که m تا '1' داریم و می‌خواهیم آنها را بین N جعبه $(x_1, x_2, \dots, x_N)$
تقسیم کنیم. به طوری در هر جعبه (x_i) هر تعداد دلخواهی '1' قرار بگیرد. بنابراین تعداد حالت‌ها

$$\binom{N+m-1}{N-1}$$

به عنوان یک مثال عددی : معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

$$1\,|\,1\ \ldots\ldots\ |\,1\ \ |\,|\,|\,|$$

$$\binom{5+9}{5-1} = \binom{14}{4}$$

$$x_1 = 2\ ,\quad x_2 = 4\ ,\quad x_3 = 0\ ,\quad x_4 = 1\ ,\quad x_5 = 3$$

* اگر بخواهیم m شی را در N جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه دست کم یک شی قرار بگیرد، تعداد حالت های ممکن چقدر خواهد بود؟ توجه داشته باشیم که در این حالت لازم است شرط $m \geq N$ برقرار باشد.

با توجه به اینکه در هر جعبه باید دست کم یک شی قرار بگیرد، تعداد مکان هایی که برای قرار دادن مرزها داریم برابر است با $m-1$ مکان. از بین این $m-1$ مکان می توانیم $N-1$ مکان را برای قرار دادن مرزها انتخاب کنیم

$$\binom{m-1}{N-1} = C_{N-1}^{m-1}$$

* معادلهٔ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ را در نظر بگیرید. اگر x_i ها اعداد صحیح مثبت باشند. این معادله چند جواب دارد؟ $(m \geq n)$

$$\overset{1}{1} \;\Big|\; \overset{2}{1} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; \overset{m}{1}$$

$$\binom{m-1}{n-1} = C_{n-1}^{m-1}$$

به عنوان مثال عددی: معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ چند جواب صحیح مثبت دارد؟

$$\overset{1}{1} \;\Big|\; 1 \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; \overset{10}{1}$$

$$\binom{10-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

$x_1 = 2 ,\ x_2 = 4 ,\ x_3 = 2 ,\ x_4 = 1 ,\ x_5 = 1$

* یکی از کاربردهای ترکیب، در بسط دو جمله‌ای هاست که در بحث احتمال نیز می‌تواند کمک کننده باشد. بسط دو جمله‌ای $(x+y)^N$ را در نظر می‌گیریم.

$$(x+y)^N = \sum_{i=0}^{N} \underbrace{\binom{N}{i}} x^i y^{N-i} = \sum_{i=0}^{N} C_i^N x^i y^{N-i} \qquad (*)$$

ضریب جمله $x^i y^{N-i}$ در بسط دو جمله‌ای است.

* با کمک بسط دو جمله‌ای می‌توان نشان داد که همواره

$$\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 2^N$$

اثبات: در رابطه (*) قرار دهید $x = y = 1$

مثال - تعداد کل زیرمجموعه های یک مجموعه N عضوی چند است؟

$$\underbrace{\binom{N}{0}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی}} + \underbrace{\binom{N}{1}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{N}{N}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } N \text{ عضوی}} = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 2^N$$

مثال - تعداد کل بردارهای باینری به طول n چقدر است؟

بردار باینری به طول n = برداری با طول n که اعضای آن '0' و '1' باشند به عنوان مثال

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یک بردار باینری به طول 6 :

مکان (المان) $\quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad n$

$$\underline{}\ \ \underline{}\ \ \cdots\ \ \underline{}$$

'0' یا '1' (2 حالت) $\quad 2 \quad \cdots \quad 2 \longrightarrow$ کل تعداد حالت ها $\quad 2^n$

$$\text{تعداد کل بردارهای باینری به طول } N = \binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \cdots + \binom{N}{N} = 2^N$$

$\binom{N}{0}$: تعداد بردارهای به طول N که هیچ عنصر آن '1' نیست.

$\binom{N}{1}$: تعداد بردارهایی که یک عنصر آن '1' است

$\binom{N}{2}$: تعداد بردارهایی که دو عنصر آن '1' است

$\binom{N}{N}$: تعداد بردارهایی که N عنصر آن '1' است

$$\text{تعداد بردارهای باینری به طول } N \text{ که } m \text{ عنصر آن برابر '1' و } N-m \text{ عنصر آن برابر صفر است} = \binom{N}{m}$$

تعداد نحوه‌ی قرار گرفتن m تا 1 و N-m تا 0 در N مکان یک بردار